2.

MEMORIA

SOBRE LA

COMPENSACION GENERAL DE LOS ERRORES

EN LA

RED GEODÉSICA DE ESPAÑA,

POR

D. JOAQUIN BARRAQUER,
TENIENTE CORONEL, CAPITAN DE INGENIEROS; DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y ESTADÍSTICO.

D. FRANCISCO CABELLO,
TENIENTE CORONEL, CAPITAN DE ARTILLERÍA; DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y ESTADÍSTICO.

PUBLICADA, DE ÓRDEN DEL GOBIERNO DE LA REPÚBLICA,

POR EL

INSTITUTO GEOGRÁFICO Y ESTADÍSTICO.

MADRID.
IMPRENTA, ESTEREOTIPIA Y GALVANOPLASTIA DE ARIBAU Y C.ª
(SUCESORES DE RIVADENEYRA),
calle del Duque de Osuna, número 3.

1874

Los trabajos geodésicos de primer órden de España, terminados ya en su mayor parte, han de responder á dos objetos: práctico el uno, que es el de servir de fundamento á la formacion del mapa topográfico, y científico el otro, por contribuir con nuevos datos á la determinacion de la forma y dimensiones de nuestro planeta.

Las observaciones hechas hasta el dia parece que los satisfacen cumplidamente, no habiéndose omitido en ellas precaucion alguna y aprovechado la experiencia de trabajos análogos; y si bien una obra tan vasta, costosa y delicada presenta, como es inevitable, pequeñas diferencias de detalle, es ciertamente notable la armonía del conjunto, y más si se atiende al crecido número de observadores que han tomado parte en ella.

La verdadera red de geodesia superior, es decir, la que ha de satisfacer al objeto científico, único de que se ocupa esta memoria, está formada por las cadenas que siguen las direcciones de meridianos, de paralelos,

y los contornos de las costas (*); esta red comprende en conjunto cerca de trescientos vértices, en casi todos los cuales, como se ha dicho, se han observado ya las direcciones azimutales, ajustándose al método empleado por el ilustre general Baeyer.

Inútil es hacer notar que, estando íntimamente ligado cada sistema de observacion con los procedimientos del cálculo, ha de seguirse en éstos el camino trazado en la obra *Base central de la triangulacion geodésica de España;* y así se ha hecho, en efecto, hasta la terminacion de los referentes á cada estacion aislada; cálculos que se puede decir forman la primera parte. Todas estas direcciones más probables, en combinacion con las longitudes lineales, obtenidas por mediciones de bases, han de dar valores únicos para todos y cada uno de los elementos que constituyen la red; por lo cual, considerada la cuestion bajo el punto de vista científico, es indispensable hacer una compensacion general y simultánea en toda ella, de los errores que acusan las observaciones ó datos superabundantes.

El enorme número de datos que han de concurrir á esta segunda parte del cálculo le dá gran importancia y no deja de originar dificultades materiales para su ejecucion; el órden y método, no sólo en su distribucion, sino hasta en los más pequeños detalles, son indispensables, no pudiendo considerarse como supérfluas cuantas precauciones se puedan tomar para evitar que se deslice error alguno.

(*) Véase la obra *Descripcion geodésica de las islas Baleares.* Madrid, 1871, apéndice núm. 4.

En atencion á que ya está casi terminada la primera parte de los cálculos hasta las ecuaciones que sirven de enlace entre los de cada estacion y los que exige la compensacion general de todo el sistema poligonal, es posible comenzar el establecimiento de las ecuaciones de condicion que arroja su forma geométrica. Al formularlas hay que tener siempre presente que las hipótesis que se admitan para ello no han de afectar nunca á la tercera cifra decimal de segundo, que se escribe en las direcciones más probables de cada estacion aislada.

Sabido es que las ecuaciones de condicion se pueden agrupar en dos especies: las llamadas de ángulo y las de lado. Las primeras se formulan por medio de la relacion que existe entre la suma de los ángulos interiores de todo polígono y 180° (n—2); y las de lado por la expresion de las condiciones á que han de satisfacer los ángulos observados para obtener siempre el mismo valor lineal para cada lado ó línea, por cualquier camino que se calcule; es decir, para que sea posible la existencia de la figura geométrica entre los puntos que se consideran.

ECUACIONES DE ÁNGULO.

En cada estacion aislada las direcciones más probables no pueden exigir por sí solas ecuacion alguna; todas ellas están enlazadas entre sí por las relaciones que han servido á su determinacion; y los ángulos, ex-

presados por sus valores relativos. Para que exista condicion de esta especie, es precisa la combinacion por lo ménos de tres puntos, observados recíprocamente; si los ángulos medidos estuviesen sobre un mismo plano, tendrian que satisfacer á la condicion general de los polígonos; pero como están para el efecto en los planos tangentes á la superficie de nivel de los mares, aquella suma excederá siempre á la expresion $180° (n-2)$ en el valor ε del llamado exceso esférico. Este exceso, debido á la falta de paralelismo de las verticales en los puntos de estacion, ó sea á la curvatura de la superficie terrestre, es, por consiguiente, funcion del área del triángulo, y en los situados sobre una esfera de radio igual á la unidad, está expresado por esta misma área. No sucede lo mismo sobre la superficie terrestre, por no ser uniforme su curvatura en todos los puntos, si bien las diferencias son tan pequeñas que para triángulos de las magnitudes de los observados se puede casi siempre aplicar á ε la conocida fórmula demostrada por Legendre, la cual tiene además aplicacion al cálculo de todo triángulo geodésico formado sobre una superficie poco diferente de una esfera, aunque sus lados alcancen amplitudes de un grado terrestre, áun aceptando como iguales para este cálculo de ε las áreas del triángulo geodésico y del triángulo plano de lados iguales.

Los ángulos observados no son precisamente los que forman entre sí las líneas geodésicas marcadas sobre el esferoide, sino los que forman los planos que contienen á la normal del punto de estacion y á cada uno de los observados; pero se aproximan muchísimo á

serlo, y en realidad es permitido prescindir por ahora de esta consideracion.

De cuanto queda expuesto se desprende que se pueden establecer las ecuaciones de condicion considerando cada triángulo situado sobre una esfera de radio conveniente, salvo calcular hasta qué límite son admisibles estas suposiciones sin afectar á las cifras que entran en el cálculo.

Sean, pues, tres puntos, que observados recíprocamente den, por medio de las direcciones más probables en cada estacion, los ángulos A_0, B_0, C_0; representando por u el exceso de su suma sobre dos ángulos rectos, será:

$$A_0 + B_0 + C_0 = 180^\circ + u \qquad (1)$$

Si fuera posible conocer los verdaderos ángulos A, B, C, que para el cálculo han de ser los que resulten de la compensacion general, su suma valdria $180^\circ + \varepsilon$, seria pues:

$$A + B + C = 180^\circ + \varepsilon \qquad (2)$$

Estos ángulos son desconocidos, pero sus diferencias con los observados han de ser pequeñísimas, y pueden considerarse como incrementos diferenciales; por lo cual se escribe la ecuacion de condicion:

$$dA + dB + dC + (u - \varepsilon) = 0 \qquad (3)$$

expresando dA, dB y dC, en funcion de las correcciones de las direcciones correspondientes.

Si la red estuviese formada por una cadena sencilla

de triángulos, en cada uno de ellos quedaria satisfecha esta condicion por $dA = dB = dC = \frac{u - \varepsilon}{3}$; no habiendo, en general, motivo que pueda oponerse á esta igual distribucion, supuesta de forma esférica la superficie sobre que se opera.

Partiendo de dos puntos directamente enlazados, se pueden formar sucesivamente estas ecuaciones de condicion como ya se sabe, teniendo cuidado de no omitir ninguna ni repetir una condicion ya implícitamente satisfecha por las anteriores, hasta completar el número expresado por $l - p + 1$, que existe en un sistema de l líneas que, observadas recíprocamente, enlazan á p puntos.

Para calcular convenientemente la constante ε de cada ecuacion, sean A, B, C, los ángulos de un triángulo esférico, y A′, B′, C′, los correspondientes del triángulo plano cuyos lados a, b, c tienen la misma longitud que los del esférico, y admitiendo que ambos tienen tambien igual área, á causa de entrar ésta en la fórmula multiplicada por un factor pequeñísimo, será:

$$\varepsilon'' = ab. \operatorname{sen} C' \frac{1}{2R^2 \operatorname{sen} 1''} \qquad (4)$$

El primer factor se conocerá siempre con sobrada aproximacion, porque basta que a y b provengan de una sola base y $C' = C - \frac{u}{3}$. En el segundo, R es el radio de la esfera en cuya superficie está el triángulo, cuyo valor hay que determinar. Considerando la superficie terrestre como la de un elipsoide de revolucion en la comarca que abraza la red, no es posible admi-

tir que R sea constante para los diversos triángulos, ni ménos sustituirlo por el radio del elipsoide, por no expresar éste en manera alguna la curvatura terrestre; y solamente para una localidad determinada y triángulos muy pequeños, seria lícito emplear, aunque sin ventaja alguna, el radio del elipsoide como valor aproximado.

Si fuera posible la existencia de una superficie esférica osculatriz á la del elipsoide en el centro de cada triángulo, ciertamente que ambas superficies podrian considerarse como confundidas en una sola en toda la extension del triángulo; pero no siéndolo, se recurre al arbitrio de emplear la esfera cuyo radio es $\sqrt{\rho\,\rho'}$, representando por ρ y ρ' los radios de curvatura, en el punto en que se opera, de la elipse generatriz y de la producida por la interseccion con el elipsoide, del plano vertical perpendicular al meridiano; ó sean los radios de curvatura máxima y mínima.

Por medio de las expresiones de estos radios

$$\rho = \frac{E\,(1-e^2)}{(1-e^2\,\text{sen}^2\,L)^{\frac{3}{2}}} \qquad \rho' = \frac{E}{(1-e^2\,\text{sen}^2\,L)^{\frac{1}{2}}}$$

y los valores de E y e^2 dados por Struve en su obra *Arc du Méridien de* 25° 20′ *entre le Danuve et la Mer Glaciale*, se han determinado sus valores de 30′ en 30′ (Tablas 1.ª y 2.ª) entre los grados de latitud 36° y 44° que comprenden nuestra red. Cada uno de ellos se refiere, como es consiguiente, á la latitud que le corresponde; por cuya razon y como el objeto es que las superficies esféricas auxiliares se confundan lo más

posible con la del elipsoide en toda la extension de cada triángulo, conviene para mayor aproximacion deducir los radios de curvatura, ó más bien corregirlos en funcion de las longitudes lineales de un grado de meridiano y de la del arco perpendicular á éste.

La longitud lineal de un grado de meridiano, en funcion del radio de curvatura de la elipse generatriz y de la latitud, referentes ambos al extremo del arco más próximo al ecuador, está expresada, con aproximacion más que suficiente por la fórmula:

$$G_M = \frac{\pi}{180} \rho \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \text{ sen } 2 \text{ L} \right) \qquad (5)$$

y la del arco en direccion normal al meridiano, siendo ρ' y L los correspondientes al punto de interseccion de los dos arcos por

$$G_P = \frac{\pi}{180} \rho' \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 e^2 \text{ sen}^2 \text{ L} \right) \qquad (6).$$

Las correcciones que han de sufrir ρ y ρ' debidas á los segundos términos de los paréntesis (*) son muy pequeñas y de signos contrarios, por lo cual los nuevos radios r_M, r_P en funcion de las longitudes lineales de los arcos de un grado, y por consiguiente, sus productos diferirán muy poco de los $\rho\rho'$, como lo evidencian las tablas 2.ª y 3.ª, y de aquí la poca influencia que una pequeña variacion en el achatamiento terrestre ó en las longitudes de los grados ejerce sobre el

(*) En la tabla 5.ª aparecen los valores de G_M y G_P [(5) y (6)] calculados de medio en medio grado para todas las latitudes de la Península.

valor del radio $\sqrt{r_M r_P}$ y ménos aún sobre el exceso esférico ε. Cada valor de r_M para la latitud L se ha obtenido por medio de la sustitucion de $L-30'$ y de ρ para esta latitud en la expresion de G_M; y los de r_P para la misma latitud L, por ρ' y la latitud del punto de interseccion de los dos arcos, á causa de las pequeñísimas variaciones de ρ' en la proximidad de este punto.

Introduciendo los valores de r_M r_P de la tabla 3.ª en vez de R^2 en la fórmula del exceso esférico, se ha formado la tabla 4.ª, que contiene los valores del segundo factor $K = \frac{1}{2\, r_M\, r_P \operatorname{sen} 1''}$.

Resta averiguar hasta qué límite es preciso interpolar estos valores para conseguir que sus errores no se propaguen á la tercera cifra decimal del exceso esférico. En la red española se puede aceptar en general como límite superior de los excesos el valor de 15″; como la diferencia tabular logarítmica entre 15.000 y 15.001 es de 0,00002895, mayor que la mitad de la máxima diferencia 0,00005148 de la tabla 4.ª, resulta que bastan los valores de K calculados de 30′ en 30′; debiéndose aceptar para cada triángulo el de la tabla cuya latitud correspondiente se aproxime más á la $\frac{l+l'+l''}{3}$, promedio de las de sus vértices. Los valores de $\sqrt{r_M\, r_P} = R_c$ de la misma tabla, que llamarémos radios de curvatura media, son los que conviene emplear en las fórmulas que conteniendo al radio R requieran sus resultados esta aproximacion.

Para apreciar las diferencias que existen entre los excesos esféricos calculados con R_c y con R, radio del elipsoide, si se considera que con los elementos dados

por Struve es $R_c = R$ á la latitud 35° 20′ próximamente (*), se ve que los valores de K, y por consiguiente, los de los excesos obtenidos por medio de R serán todos, para la red española, mayores de lo que deben ser, aumentando las diferencias con la latitud. Para la de 43° será:

Valores de log. K calculados por	R_c.	$\bar{9}$,40419650
	R.	$\bar{9}$,40535107
Diferencia.		0,00115457

que correspondiendo próximamente al número 1,003, dá una diferencia de tres milésimas en los excesos, llegando en el límite de su valor 15″ á producir un error de 0″,045.

Respecto á las diferencias entre los valores de R_c y de R, será para la misma latitud de 43°:

log. R_c. . . .	6,80459931..	. . . R_c.. . . .	6.376748^m,8
log. R.	6,80402203..	. . . R.	6.368278 ,3
		Diferencia. . . .	8470^m,5

Una vez calculados los valores de R_c convenientes para la fórmula (4) de ε'', hay que averiguar hasta qué magnitud del área $\frac{a\ b \text{ sen } C'}{2}$ es permitido adoptar esta expresion, en la que se supone que los excesos corres-

(*) Igualando las expresiones de ambos radios, será:

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \text{ sen}^2 L} = \sqrt{\frac{1-e^2(2-e^2) \text{ sen}^2 L}{1-e^2 \text{ sen}^2 L}}$$

de donde se deduce, teniendo presente que e^2 y $\text{sen}^2 L$ son siempre menores que la unidad:

$$\text{sen}^2 L = \frac{3-e^2-\sqrt{9-e^2(14-5e^2)}}{2e^2(2-e^2)};$$ y sustituyendo en ésta por e^2 su valor, resulta $L = 35° \ 20'26'',4$. En esta latitud, la longitud comun á ambos es de 6.371098^m.

pondientes les son proporcionales, considerando que el triángulo se halla á la vez sobre la superficie esférica del radio R_c y sobre la terrestre. Esta suposicion se puede admitir para triángulos de cierta magnitud; pero con ésta aumenta el error que se comete, como tambien depende de las longitudes relativas de los lados el que se origina al operar repartiendo por igual el exceso esférico entre los tres ángulos A, B, C, para obtener los del triángulo plano A′, B′, C′, que tienen lados de igual longitud que el esférico.

Segun las fórmulas de trigonometría esférica (*)

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen.}\, b\ \text{sen.}\, c} \qquad (7),$$

de cuya expresion, sustituyendo por cos. b, cos. c, sen b, sen c y cos. a, sus valores en funcion de los arcos a, b, c, efectuando la division, aproximando hasta los términos de 8.° órden, haciendo las reducciones é introduciendo el valor J del área del triángulo plano correspondiente, resulta:

$$\cos. A' - \cos. A = \frac{1}{3} J\ \text{sen.}\, A' \left[1 + \frac{3b^2 + 3c^2 - a^2}{30} \right] \quad (8),$$

en la cual, aplicando las fórmulas de inversion de Lagrange (**), y despreciando el término de 6.° órden, será:

$$A - A' = \frac{1}{3} J \left[1 + \frac{3b^2 + 3c^2 - a^2}{30} \right] - \frac{1}{18} J^2 \text{cotg.}\, A \quad (9).$$

(*) *Lehrbuch der Höheren Geodäsie, von Dr. Philipp Fischer, Giessen.*
(**) FRANCŒUR, *Mathématiques pures.*

Expresiones análogas se hallarian para B—B', C—C'; y sumándolas, la del exceso esférico, que es:

$$\varepsilon = J\left[1+\frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2)\right]-\frac{1}{18}J^2(\text{cotg. A}+\text{cotg. B}+\text{cotg. C})\ (10).$$

Sustituyendo en ésta cotg. A, cotg. B, cotg. C por cotg. A', cotg. B', cotg. C', lo cual se puede hacer sin error sensible por entrar sólo en los términos afectados por J^2, se llega finalmente á la fórmula de ε, en segundos, muy cómoda para el cálculo:

$$\varepsilon'' = ab \text{ sen C'.K}\left[1+\frac{1}{24\, r_M\, r_P}(a^2+b^2+c^2)\right]\quad (11).$$

Esta fórmula dá para ε'' el mismo valor que la (4) con la correccion debida al segundo término del paréntesis. Como los lados a, b, c, son muy pequeños relativamente á $r_M\, r_P$, este término, multiplicado por el ε'' de dicha fórmula, produce incrementos pequeñísimos, pero cuya magnitud se debe investigar. En nuestra red serán éstos mayores á la latitud mínima de 36°; y para el límite de ε'', considerado de 15'', se puede determinar por la fórmula (4) el valor del lado del triángulo equilátero plano, correspondiente al esférico que tenga este exceso, y será:

log. 15.	1,17609126		
c. log. K.	8,59509765		
c. log. sen 60°.. . .	0,06246937		
log. a^2.	9,83365828		
log. a..	4,91682914. . . .	a. . . .	82571^m

y para este triángulo el incremento debido al segundo término del paréntesis:

log. 15.	1,17609126	
log. a^2..	9,83365828	
c. log. 8.	$\bar{1}$,09691001	
c. log. $r_M\ r_P$.	$\overline{14}$,39150722	
log. incremento..	$\bar{4}$,49816677. . . .	0″,00031,

que siendo menor que media unidad del tercer órden, no influye en el cálculo.

Si se quiere averiguar qué área de triángulo equilátero empieza á influir en la tercera cifra decimal, será:

$$0{,}0005 = a^2 . \text{sen } 60^o . \text{K} . \frac{a^2}{8\ r_M\ r_P}$$

$$a^4 = \frac{0{,}0005 . 8\ r_M\ r_P}{\text{K} . \text{sen } 60^o}$$

y para la misma latitud de 36°, $a = 92.689^m$, correspondiendo al triángulo un exceso esférico de cerca de 19″.

De lo dicho se deduce, en vista de las magnitudes de los triángulos de la red que dan lugar á ecuaciones de condicion de ángulo, que siempre se podrá calcular ε'' sin error sensible por medio de la fórmula (4). Se ha considerado un triángulo equilátero por ser el tipo á que tienden en general todos ellos; y si bien es cierto que el valor $a^2 + b^2 + c^2$ podrá en algun caso ser numéricamente mayor que el $3a^2$ calculado, como el otro factor $\text{K}.ab.$ sen C′ será necesariamente mucho menor, el producto, ó sea el incremento para ε'', quedará en los límites asignados.

La fórmula (9) expresa la diferencia A — A′ entre el ángulo esférico y el plano correspondiente. Sustituyendo como ántes cotg. A por cotg. A′, y siendo J cotg. $A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$, resulta:

$$A = A' + \frac{J}{3} + \frac{J}{360}(7b^2 + 7c^2 + a^2) \quad (12),$$

en la cual, escribiendo por J su valor $\frac{\varepsilon}{1 + \frac{1}{24}(a^2 + b^2 + c^2)}$, efectuando las operaciones indicadas, despreciando las potencias superiores y reduciendo, se llega á la:

$$A - A' = \frac{\varepsilon}{3}\left[1 + \frac{1}{60}(b^2 + c^2 - 2a^2)\right] \quad (13),$$

que dá la diferencia entre los ángulos esférico y plano correspondientes, y marca los límites para la aplicacion del teorema de Legendre, al corregir por igual los tres ángulos, demostrando que este teorema sólo es exacto cuando el triángulo es equilátero. Esta consideracion es de todo punto despreciable para el objeto de la cuestion que se trata, porque en el cálculo de ε no es preciso conocer la superficie del triángulo plano con gran aproximacion; pero esta fórmula sirve cuando la magnitud del triángulo ó la naturaleza del cálculo exigen que se conozcan con gran precision los excesos especiales correspondientes á cada uno de los ángulos.

ECUACIONES DE LADO.

Para fijar un punto basta que se hayan observado sus direcciones desde otros dos, de posicion conocida; la observacion de otra direccion á este mismo punto desde un tercero ó viceversa, establece la condicion de que las tres han de concurrir en él, para que sea po-

sible la figura. A esta consideracion son debidas las ecuaciones de lado, que corrigen los ángulos, de suerte que los valores lineales calculados sean siempre los mismos por cualquier camino que se siga en el cálculo.

Sea (*Fig.* 1) el punto D observado desde los A, B, C, ya enlazados; dos de las tres direcciones AD, BD, CD, bastan para fijarle, y con la tercera se establece la condicion de que las tres han de concurrir en el mismo punto D; por lo cual, considerando los tres triángulos DAB, DBC y DCA, se habrá de verificar que:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha.\,\text{sen}\,\beta.\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha^{\text{I}}.\,\text{sen}\,\beta^{\text{I}}.\,\text{sen}\,\gamma^{\text{I}}} = 1 \qquad (14),$$

en que se formula la condicion de lado. Si los ángulos observados α, β, γ, α^{I}... no tuviesen error, esta condicion quedaria satisfecha, siendo el primer miembro igual á la unidad; su diferencia á ésta será una cantidad pequeñísima dependiente de los incrementos diferenciales que han de sufrir los ángulos α, β, γ, α^{I}... para convertirse en los verdaderos ó compensados; se puede pues considerar esta diferencia como incremento diferencial de la funcion que forma el primer miembro de la expresion, por lo cual, agregando á ésta su diferencial, habrá de ser igual á la unidad. Diferenciando y reduciendo, será:

$$d\,\frac{\text{sen}\,\alpha.\,\text{sen}\,\beta.\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha^{\text{I}}.\,\text{sen}\,\beta^{\text{I}}.\,\text{sen}\,\gamma^{\text{I}}} = \frac{\text{sen}\,\alpha.\,\text{sen}\,\beta.\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha^{\text{I}}.\,\text{sen}\,\beta^{\text{I}}.\,\text{sen}\,\gamma^{\text{I}}}\,(\text{cotg}\,\alpha.\,d\alpha + \text{cotg}\,\beta.\,d\beta + \text{cotg}\,\gamma.\,d\gamma - \text{cotg}\,\alpha^{\text{I}}.\,d\alpha^{\text{I}} - \text{cotg}\,\beta^{\text{I}}.\,d\beta^{\text{I}} - \text{cotg}\,\gamma^{\text{I}}.\,d\gamma^{\text{I}}) \qquad (15),$$

y por consiguiente,

$$1 = \frac{\text{sen}\,\alpha.\,\text{sen}\,\beta.\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha^{1}.\,\text{sen}\,\beta^{1}.\,\text{sen}\,\gamma^{1}} + \frac{\text{sen}\,\alpha.\,\text{sen}\,\beta.\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha^{1}.\,\text{sen}\,\beta^{1}.\,\text{sen}\,\gamma^{1}}(\text{cotg}\,\alpha.\,d\alpha + \text{cotg}\,\beta.\,d\beta + \text{cotg}\,\gamma.\,d\gamma - \text{cotg}\,\alpha^{1}.\,d\alpha^{1} - \text{cotg}\,\beta^{1}.\,d\beta^{1} - \text{cotg}\,\gamma^{1}.\,d\gamma^{1}) \quad (16).$$

El factor que multiplica á la cantidad comprendida en el paréntesis se ha dicho que difiere de la unidad en una cantidad diferencial; despreciando las diferenciales de 2.º órden y dividiendo la constante por sen 1″ para que las correcciones estén expresadas en segundos, se tendrá la ecuacion de lado:

$$0 = \frac{1}{\text{sen}\,1''}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha.\,\text{sen}\,\beta.\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha^{1}.\,\text{sen}\,\beta^{1}.\,\text{sen}\,\gamma^{1}} - 1\right) + (\text{cotg}\,\alpha.d\alpha + \text{cotg}\,\beta.d\beta + \text{cotg}\gamma.d\gamma) - (\text{cotg}\,\alpha^{1}.\,d\alpha^{1} + \text{cotg}\,\beta^{1}.\,d\beta^{1} + \text{cotg}\,\gamma^{1}.\,d\gamma^{1}) \quad (17),$$

en la cual las correcciones $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\alpha^{1}$... vendrán expresadas en funcion de la resta algebráica de las correspondientes á las direcciones que determinan los ángulos α, β, γ, α^{1}... Se ha supuesto al establecer la (17), y en ello no hay error sensible, que los cuatro puntos A, B, C, D, están situados sobre una misma superficie esférica.

Idéntica forma tiene la ecuacion cuando el punto D está en el interior del triángulo ABC, y tambien cuando se forma un polígono á su alrededor. Se debe procurar que los ángulos que entren en el cálculo sean observados y no deducidos, lo que en nuestra red se podrá siempre conseguir, eligiendo además el punto del cuadrilátero, de manera que estos ángulos y sus suplementarios á 180° no sean muy agudos, por venir expresados los coeficientes, ó sean los pesos de las incógnitas ó correcciones, por sus cotangentes.

Al establecer estas ecuaciones se deben tomar las

mismas precauciones que se han indicado al tratar de las de ángulo, marchando de punto en punto hasta completar el total de $l-2\,p+3$, que dá una red de p puntos unidos por l líneas, sean ó no recíprocas.

ECUACIONES DE CONDICION

DE LOS GRANDES CUADRILÁTEROS Ó ESPACIOS CERRADOS POR LAS CADENAS.

I.

Las cadenas que constituyen la red española cierran al cruzarse grandes espacios poligonales ó cuadriláteros, que por sí solos motivan especiales condiciones. Si una cadena, cuyos lados extremos sean iguales, se supone doblada hasta que éstos coincidan ó se superpongan, es evidente que existirán en ella las mismas ecuaciones de condicion que ántes, y además las que produzca la disminucion de una línea y de dos puntos; de donde se deduce que la existencia de cada espacio cerrado ó cuadrilátero exige una ecuacion de ángulo y tres de lado. A la misma consecuencia se llega por la consideracion de que una cadena sencilla de triángulos que cierra un espacio, tiene doble número de líneas que de puntos.

Sea (*Fig.* 2) la cadena AA′ BB′ C′...N′ que cerrando el espacio E hace indispensable la existencia de los dos polígonos ABCD...F y A′B′C′D′...N′. La ecuacion de ángulo estará cifrada en que la suma de los ángulos interiores de uno cualquiera de ellos sea igual á

$180^\circ (n-2)+\varepsilon$, siendo n el número de vértices y ε el exceso esférico correspondiente á toda el área del polígono, y se tendrá para el interior:

$$A+B+C+D+E+F-\varepsilon-4\times 180^\circ=0 \qquad (18),$$

ó bien:

$$dA+dB+dC+dD+dE+dF+(u-\varepsilon)=0 \qquad (19).$$

Para calcular el valor de ε se divide el polígono en triángulos á partir de un punto interior ó vértice cualquiera A por medio de las rectas AC, AD, AE... y se calcula el exceso de cada uno de ellos, cuya suma será el valor de ε. Los valores conocidos de los lados AB, BC... FA y de los ángulos observados, son suficientemente aproximados para este objeto. En la determinacion de los excesos esféricos de los triángulos hay que tener presente cuanto se deja consignado.

Para el establecimiento de las ecuaciones de lado, si se une cada vértice con los segundos adyacentes por las rectas AC, BD, CE... FB, quedará formado un polígono alrededor de cada uno, cuya existencia simultánea, y por consiguiente la de la figura, exige las condiciones expresadas por las ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{En B.} \ldots\ldots & \dfrac{\operatorname{sen}\alpha.\ \operatorname{sen}\alpha^{I}.\ \operatorname{sen}\alpha^{II}.\ \operatorname{sen}\gamma^{III}.\ \operatorname{sen} m}{\operatorname{sen}\gamma.\ \operatorname{sen}\beta^{I}.\ \operatorname{sen}\beta^{II}.\ \operatorname{sen}\beta^{III}.\ \operatorname{sen} n}=1 \\
\text{En C.} \ldots\ldots & \dfrac{\operatorname{sen}\alpha^{III}.\ \operatorname{sen}\alpha^{IV}.\ \operatorname{sen}\gamma^{V}.\ \operatorname{sen} m^{I}}{\operatorname{sen}\gamma^{III}.\ \operatorname{sen}\beta^{IV}.\ \operatorname{sen}\beta_{V}.\ \operatorname{sen} n^{I}}=1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{En A.} \ldots\ldots & \dfrac{\operatorname{sen}\alpha^{XIV}.\ \operatorname{sen}\alpha^{XV}.\ \operatorname{sen}\gamma.\ \operatorname{sen} m^{V}}{\operatorname{sen}\gamma^{XIV}.\ \operatorname{sen}\beta^{XV}.\ \operatorname{sen}\beta.\ \operatorname{sen} n^{V}}=1
\end{array}\right\} \quad (20).$$

Multiplicándolas entre sí se obtiene la condicion de lado

$$\frac{\text{sen}\,\alpha.\ \text{sen}\,\alpha^{\text{I}}\ .\ \text{sen}\,\alpha^{\text{II}}.....\ \text{sen}\,\alpha^{\text{XV}}}{\text{sen}\,\beta.\ \text{sen}\,\beta^{\text{I}}\ .\ \text{sen}\,\beta^{\text{II}}.....\ \text{sen}\,\beta^{\text{XV}}}=1 \qquad (21).$$

Satisfecha ésta, se verifica que partiendo de un lado cualquiera y siguiendo el órden sucesivo de los triángulos, se llega al lado de partida con idéntico valor lineal; pero esto no implica que la cadena cierre un espacio, es decir, que existan los polígonos ABCD...F interior, ni el exterior A′ B′ C′ D′... N′, puesto que en la condicion (21) están eliminados los ángulos γ, γ^{III}, γ^{V}... formados por las líneas que unen cada dos vértices consecutivos del polígono interior con el correspondiente del polígono exterior. Por otra parte, es evidente que se llegaria á la misma fórmula (21) considerando los polígonos formados al rededor de los puntos exteriores A′, B′, C′... N′, por medio de las líneas A′C′, B′D′... y tambien recorriendo toda la cadena envolvente á partir de un lado por la proporcionalidad de los senos de los ángulos alternos.

La existencia de los polígonos ABCD........F y A′B′C′D′...N′ es indispensable para la de la figura y ha de dar lugar, por consiguiente, á dos ó más ecuaciones de lado que encierren esta condicion. Respecto al polígono interior, se observa que las magnitudes relativas de los lados AB, BC... son conocidas por su igualdad con las $\frac{\text{sen}\,n}{\text{sen}\,m}$, $\frac{\text{sen}\,n^{\text{I}}}{\text{sen}\,m^{\text{I}}}$... de las ecuaciones (20); pero como estas relaciones se irán eliminando sucesivamente siempre que se combinen entre sí, no es posible por este camino establecer la condicion de figura del polí-

gono ABCD...F, esto es, la de que partiendo del punto A, se llegue dando la vuelta por toda la cadena al mismo punto geométrico. Por esta razon, ocurre como medio inmediato para formularla, enlazar directamente las líneas AB, BC... formando lados de triángulos sucesivos, ó sea una cadena auxiliar de enlace y expresar, en funcion de los ángulos observados, las condiciones de su existencia.

Sea el polígono ABCD... (*Fig.* 3), en que se conocen por la observacion sus ángulos y las relaciones entre los lados; si se unen todos los vértices con un punto arbitrario O, la condicion del polígono será de la misma forma que la del caso general (14). El punto O se puede elegir con la condicion de que los ángulos m y n sean respectivamente iguales á $\frac{A}{2}$ y $\frac{B}{2}$, y en este caso será la segunda condicion de lado:

$$\frac{\text{sen}\,(C - x)\,\text{sen}\,(D - x^{I})\,\text{sen}\,(E - x^{II})\,\text{sen}\,(F - x^{III})\,\text{sen}\,(G - x^{IV})}{\text{sen}\,x\ \text{sen}\,x^{I}\ \text{sen}\,x^{II}\ \text{sen}\,x^{III}\ \text{sen}\,x^{IV}} = 1 \quad (22).$$

No hay dificultad alguna en expresar x, x^{I}, x^{II}... en funcion de los ángulos observados, toda vez que por medio de las relaciones conocidas entre los lados del polígono, y partiendo de uno de ellos, existen datos suficientes en cada uno de los triángulos formados por ellos y el punto auxiliar O; pero estas relaciones conducen á fórmulas poco sencillas, produciendo ademas un número crecido de términos en la condicion (22) y dificultades en la aplicacion del cálculo logarítmico. En igual inconveniente práctico se cae considerando, para establecer la condicion, unido uno de los vértices á todos los demás por medio de diagonales auxiliares.

II.

Con objeto de evitar el empleo de fórmulas complicadas en estas ecuaciones de condicion, conviene examinar las propiedades geométricas de los espacios cerrados por la red, cuya existencia rompe en cierto modo la continuidad de la figura. Para ello, es de notar que cuando se han formulado las condiciones á que ha de satisfacer un sistema de puntos unidos por líneas, no se ha tenido en cuenta el caso de existir alguna línea observada cuyos puntos extremos no estén unidos con otro tercero comun; es decir, que no forme lado de triángulo alguno. Rara vez se presentará esta circunstancia, porque implica casi siempre que la línea tiene una longitud relativamente extremada ó condiciones especialísimas, y tanto, que no tenemos noticia de trabajo alguno en que se haya tratado este asunto. En nuestra red existen líneas de esta especie, en cuanto á sus efectos, porque cada lado de polígono que ha de cerrar espacio une á dos puntos no enlazados inmediatamente á otro tercero, sino que ya lo están entre sí por el intermedio de los demas de la cadena envolvente.

Para formular las condiciones que introducen estas líneas, sea (*Fig.* 4) la cadena *abc... g*, en la que además exista la línea *ag*. La ecuacion de ángulo que origina, si sus dos extremos están observados recíprocamente, se establecerá entre los ángulos del cuadrilátero *abeg* ó de cualquier otro polígono de que sea lado

la *ag*. La ecuacion de lado no se puede expresar por el procedimiento general, pues no existe medio de calcular el lado *ag* empleando sólo las magnitudes angulares observadas. Como el formular estas condiciones exige la existencia de un polígono cerrado, desde cuyos vértices se haya fijado un mismo punto diferente de aquéllos, es preciso, para asimilarse al caso general, imaginar como observadas una ó más líneas.

Sin embargo, teóricamente está resuelto el problema expresando los elementos del cuadrilátero *abeg* en funcion de las amplitudes angulares en *b* y *e* y de los lados *ab*, *be*, *eg*, cuyas relaciones han de quedar fijas por los ángulos compensados de la cadena; pero este procedimiento ocasiona dificultades en la práctica y no conduce, por otra parte, á resultados más precisos, dentro de los límites del cálculo, tanto más, cuanto que para aplicar las fórmulas en la compensacion se habrian de hacer, para simplificarlas, suposiciones que, si bien muy aproximadas, nunca serian absolutamente exactas.

Por estas razones conviene suponer existente, como si se hubiese observado, una de las líneas *ae* ó *bg* y calcular los elementos necesarios para formular las dos ecuaciones de lado, correspondientes una á la línea *ag* y la otra á la nuevamente introducida, por medio de los polígonos cerrados que se forman alrededor de los puntos *b* y *e*. Tambien se deben introducir en la compensacion las dos ecuaciones de ángulo en vez de la que existia anteriormente. El establecimiento de todas estas ecuaciones implica la admision, como observadas, de cantidades que son calculadas y dependientes

inmediatamente de otras; no se oculta que esto no es rigoroso teóricamente, pero es admisible hasta en las operaciones de mayor precision, porque es consiguiente que, como las magnitudes observadas difieren de la verdad en cantidades diferenciales, deduciendo inmediatamente de ellas las auxiliares, éstas tambien diferirán muy poco de la verdad; y principalmente porque estas diferencias estarán comprendidas en los límites de los errores de observacion; de manera que, si realmente se hubiesen observado bien, podrian aparecer estos mismos valores, que se deducen por el cálculo.

Como la fórmula que determina el número de ecuaciones existentes en una red se deduce suponiendo que ésta es contínua y sucesiva, en cuanto á su formacion, las condiciones sólo se pueden referir á la magnitud en absoluto de las líneas y á su posicion relativa; pero en manera alguna al, por decirlo así, lugar geométrico de los puntos, que es lo que exige el cierre de los dos polígonos. Fácilmente se echa de ver esta circunstancia notable, puesto que si se trazan (*Fig.* 5) las diagonales AC, AD... AG, estarán ya todas las líneas del sistema en las condiciones ordinarias y restablecida la union ó enlace correlativo, y entónces la red presenta en sí misma la existencia del número de condiciones exigido por las fórmulas.

Las tres ecuaciones de lado que existen por razon del espacio ó polígono cerrado AB... H, se deben considerar como pertenecientes á la red originada por la supresion en la llena, ó contínua, de las direcciones AC, AD... En el caso actual hay en la llena ocho ecuaciones de lado que se forman con los polígonos alrede-

dor de cada uno de los ocho puntos A, B... H, y siendo cinco las líneas AC, AD... que se pueden admitir como suprimidas, quedan las tres condiciones anejas al espacio cerrado ABC... H. Si el punto A de enlace estuviese situado en el interior ó exterior del polígono, las ecuaciones de lado de la red llena serian nueve, las líneas suprimidas ocho, restaria, pues, una condicion, y además las dos que provienen de la supresion del punto auxiliar. Consideraciones análogas son aplicables á las ecuaciones de ángulo, con relacion á las líneas suprimidas.

Un método práctico de establecer las ecuaciones de condicion, dentro de suposiciones aceptables, es el siguiente. Sea (*Fig.* 6) el polígono *abc... g*, que ha de quedar cerrado por la red. Los elementos incompatibles de este polígono lo serán en cantidades relativamente muy pequeñas, puesto que proceden de buenas observaciones. Por esta causa, si se determinan préviamente, por medio de las amplitudes angulares observadas en la cadena envolvente, las relaciones entre todos los lados *ab*, *bc*, *cd... ga*, estas relaciones diferirán en magnitudes diferenciales de las que se obtendrian en definitiva por la compensacion general; por consiguiente, serán suficientemente aproximadas para fundar en ellas el cálculo ó expresiones de las correcciones que por el concepto del cierre del polígono han de sufrir los ángulos *a*, *b*, *c... g*. Sentado esto, si se elige un punto auxiliar *o* como de estacion, desde el cual se suponen observados todos los vértices del polígono, partiendo de uno de ellos, por ejemplo *a*, como direccion inicial, se calculará la cadena de triángulos suce-

sivos I, II, III... En el triángulo I se obtendrán por el cálculo los ángulos r^{I} y α^{I} y el lado *ob*; con éste, el ángulo β^{I} deducido y el lado *bc*, en el triángulo II, los ángulos r^{II}, α^{II} y el lado *oc*, y así sucesivamente hasta resolver el triángulo VI. Análogamente, partiendo del triángulo VII, se obtendrán por camino inverso valores para los ángulos β^{VI}, β^{V}...β^{I} y r^{VII} r^{VI}... r^{II}. Si no existiesen incompatibilidades, es óbvio que los dobles valores de los ángulos r^{I}, r^{II}... r^{VII}, resultarian idénticos y tambien las sumas de los calculados iguales á los interiores del polígono, es decir:

$$\alpha^{\text{I}}+\beta^{\text{I}}=b \quad \alpha^{\text{II}}+\beta^{\text{II}}=c \ldots\ldots \alpha^{\text{VI}}+\beta^{\text{VI}}=g$$

pero en general será:

$$\left.\begin{array}{l} b-(\alpha^{\text{I}}+\beta^{\text{I}})=\Delta^{\text{I}} \\ c-(\alpha^{\text{II}}+\beta^{\text{II}})=\Delta^{\text{II}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g-(\alpha^{\text{VI}}+\beta^{\text{VI}})=\Delta^{\text{VI}} \end{array}\right\} \quad (23).$$

Corrigiendo de la mitad de la diferencia los ángulos calculados, se tendrán los que, como si estuviesen observados, se introducirán en el cálculo ; y serán:

$$\alpha^{\text{I}}+\frac{\Delta^{\text{I}}}{2},\ \alpha^{\text{II}}+\frac{\Delta^{\text{II}}}{2} \ldots\ldots \beta^{\text{I}}+\frac{\Delta^{\text{I}}}{2},\ \beta^{\text{II}}+\frac{\Delta^{\text{II}}}{2} \ldots\ldots$$

Los dobles valores hallados para los ángulos r^{I}, r^{II}, r^{III}... se deben tambien promediar; en la primera série de triángulos se obtendrán por suma las direcciones á los puntos *b*, *c*, *d*, y en la segunda las suplementarias á 360°. Con todas estas amplitudes angulares se esta-

blecerán las siete ecuaciones de ángulo y las ocho de lado que exige la figura.

Se entiende que se deben resolver los triángulos esféricos, mas tambien se pueden sustituir por los planos correspondientes, en atencion á que será preciso conocer despues los excesos esféricos para establecer las ecuaciones de condicion de ángulo; pero en este caso habrá que corregir cada uno de los calculados del tercio del exceso esférico respectivo para obtener las direcciones convenientes.

La posicion del punto eentral *o* respecto del ángulo de partida se debe fijar en cada caso, en vista de la forma y dimensiones de la figura, para que esté situado en la zona central del polígono, formándose así triángulos regularmente conformados y de lados de longitud proporcionada. Para esto se elegirá la posicion aproximada de *o* gráficamente y en consecuencia se deducirá el vértice del polígono que ha de servir de partida para la resolucion de los triángulos, el cual será aquel cuya bisectriz se aproxime más á la zona central; el punto *o* se situará, para simplificar, sobre esta bisectriz, formando con el lado de partida un triángulo isósceles.

Si el perímetro del polígono fuese *a b* H *c d*... *g*, y el ángulo en H muy pequeño, entrante ó saliente, se podria con ventaja introducir la línea *bc* para evitar la *o*H, empleando los triángulos *obc* y *b*H*c* en vez de *ob*H y *oc*H. El polígono formado alrededor de *o* estaria mejor configurado y daria de ménos una condicion de lado, suplida por la del polígono cerrado alrededor de H. Como el número de condiciones de ángulo sería tambien

el mismo que anteriormente, se habria conseguido la ventaja de operar en el cálculo con ángulos más apropiados.

III.

El medio que se acaba de indicar resuelve el problema, pero en la práctica ocasiona cálculos prolijos. En efecto, á causa de introducir, como si estuviesen observadas, un crecido número de líneas, aumenta en proporcion doble el número de ecuaciones de condicion á que han de satisfacer los elementos de las figuras formadas y, por consiguiente, la extension del cálculo. En nuestra red hay varios espacios cerrados por considerable número de lados; la division en triángulos produce doscientas nuevas condiciones próximamente, que agregadas á las ochocientas en número redondo que ya existen, harian seguramente aumentar en un doble, por lo ménos, el cálculo de compensacion general.

Con objeto de evitar este grave inconveniente, importa ligar los lados del polígono por medio de otro arbitrio. Empleando las coordenadas de los vértices se llegarian á formular las condiciones apetecidas; pero las expresiones de estas coordenadas, bien fuesen por distancias y azimutes, por latitudes y longitudes ó por distancias á la meridiana y á la perpendicular de uno de los vértices, siempre se habrian de obtener en funcion de las cantidades observadas y bajo supuestos que, si bien aproximados, harian arbitraria entre ciertos límites la compensacion, por más que las incompatibilida-

des no se puedan admitir sino como muy pequeñas. Las fórmulas serian muy complicadas y de difícil aplicacion al cálculo; pero aunque así no fuera, no es dudoso que lo más elemental y preciso es que en las ecuaciones de condicion figuren directamente y sin cálculo ó relacion intermedia las magnitudes observadas que se han de corregir, eliminando en lo posible la influencia de las longitudes lineales, siquiera se conozcan éstas préviamente con mucha aproximacion.

Si el polígono estuviese situado en un plano, es decir, si las verticales en sus vértices fuesen paralelas, se podria establecer la condicion de cierre proyectando sucesivamente sus lados sobre dos direcciones, como, por ejemplo, sobre las de los ejes AX y AY (*Fig.* 7), y sería:

$$\left.\begin{array}{r} AB + Bc - cd - de + eA = o \\ Ac' + c'd' - d'e' - e'A = o \end{array}\right\} \quad (24),$$

ó bien, designando por L, L′, L″, L‴, las relaciones de los lados BC, CD... con el AB,

$$\left.\begin{array}{r} 1 + L\cos B + L'\cos(B+C) + L''\cos(B+C+D) + L'''\cos(B+C+D+E) = o \\ L\,\mathrm{sen}\,B + L'\,\mathrm{sen}(B+C) + L''\,\mathrm{sen}(B+C+D) + L'''\,\mathrm{sen}(B+C+D+E) = o \end{array}\right\} \quad (25).$$

Los signos de los términos están determinados por las amplitudes de los arcos que provienen de las sumas.

Si operando sobre la superficie terrestre se proyectan los distintos vértices de un polígono sobre uno de sus lados, no se conseguirán nunca expresiones tan sencillas; pero se utilizará con ventaja el medio de

proyecciones, sustituyendo al polígono observado, el polígono plano equivalente en superficie y de lados iguales á los de aquél; refiriendo despues al primero las expresiones obtenidas para el segundo. Sea (*Fig.* 8) un polígono ABCDE situado sobre la superficie terrestre, entre cuyos elementos no exista incompatibilidad; si se elige en su interior un punto O y se une con los vértices, se considerarán sucesivamente los triángulos en que se descompone su superficie, como si cada uno se hallase sobre un plano, sustituyéndolos con los triángulos planos equivalentes, deduciendo de cada ángulo el tercio del exceso esférico respectivo. Partiendo del lado AO y hácia la izquierda, sean (*Fig.* 9) I, II, III... estos triángulos; al llegar al último V, el punto A″ no coincidirá con A′, pero su posicion quedará determinada por las condiciones $O'A' = O'A''$ y ángulo $A'O'A'' = \frac{\varepsilon_p}{3}$, siendo ε_p el exceso esférico correspondiente á la superficie del polígono de la figura 8. La situacion de A″ depende de los datos arbitrarios de partida, ángulo m y lado O′A′, aunque siempre quedará fija por las mismas relaciones. Estos datos influyen tambien en las magnitudes de los ángulos B′, C′, D′,... del nuevo polígono, pero en todos los casos estarán éstos ligados por la relacion

$$m + B' + C' + D' + E' + n = A + B + C + D + E - \frac{2}{3}\varepsilon_p \qquad (26).$$

Es evidente que si se establecen las condiciones de existencia de este polígono auxiliar en funcion de los elementos observados, exigirán, para ser satisfechas, el cierre del polígono sobre la superficie terrestre, si

no exactamente, á lo ménos con una aproximacion extremada y más que suficiente para el objeto. Proyectando los lados del polígono auxiliar sobre los ejes A′X y A′Y, y designando como anteriormente por 1, L, L′, L″... sus relaciones con A′B′, serán las condiciones

$$\left.\begin{aligned} &1 + L\cos B' + L'\cos(B'+C') + L''\cos(B'+C'+D') \\ &\quad + L'''\cos(B'+C'+D'+E') - A''A'\cos A''A'x = o \\ &L\,\text{sen}\,B' + L'\,\text{sen}(B'+C') + L''\,\text{sen}(B'+C'+D') \\ &\quad + L'''\,\text{sen}(B'+C'+D'+E') - A''A'\,\text{sen}\,A''A'x = o \end{aligned}\right\} (27).$$

Representando por ε_1, ε_2, ε_3... los excesos esféricos de los respectivos triángulos, serán:

$$\left.\begin{aligned} &B' = B - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3},\ C' = C - \frac{\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3},\ D' = D - \frac{\varepsilon_3+\varepsilon_4}{3},\ E' = E - \frac{\varepsilon_4+\varepsilon_5}{3} \\ &m + n = A - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_5}{3} \end{aligned}\right\} (28),$$

y como

$$A'A'' = A'O'\,2\,\text{sen}\frac{\varepsilon_p}{6},\quad \text{ang.}^{\text{o}}\ A''A'x = 90^\circ - m + \frac{\varepsilon_p}{6},$$

sustituidos estos valores en las ecuaciones anteriores, y además tomando O′A′ = A′B′, se convierten en

$$\left.\begin{aligned} &1 + L\cos\left(B - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}\right) + L'\cos\left(B + C - \frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}\right) + \\ &L''\cos\left(B+C+D - \frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3+\varepsilon_4}{3}\right) + \ldots - 2\,\text{sen}\frac{\varepsilon_p}{6}\,\text{sen}\left(m - \frac{\varepsilon_p}{6}\right) = o \\ &L\,\text{sen}\left(B - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}\right) + L'\,\text{sen}\left(B + C - \frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}\right) + \ldots \\ &- 2\,\text{sen}\frac{\varepsilon_p}{6}\cos\left(m - \frac{\varepsilon_p}{6}\right) = o \end{aligned}\right\} (29).$$

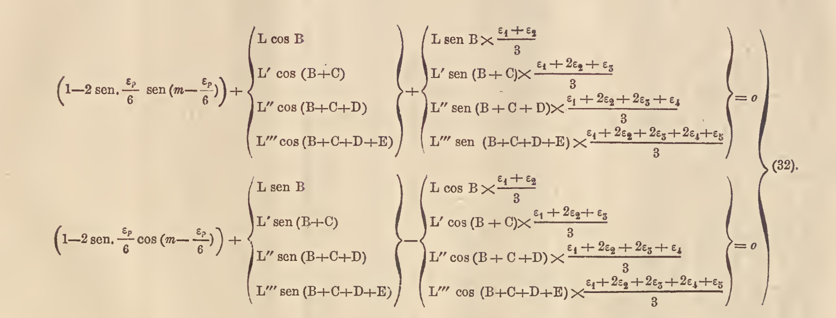
La pequeña magnitud de los últimos términos de los paréntesis, en que entran ε_1, ε_2, ε_3..., puesto que ninguno puede llegar á valer $\frac{2}{3}\varepsilon_p$, hace que, áun en el caso de un polígono de grande área, ó sea con un valor de ε_p considerable, por ejemplo de tres á cuatro minutos, se puedan siempre admitir, sin recelo de afectar á la última cifra del cálculo, las expresiones aproximadas

$$\left.\begin{aligned}\cos\left(B-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}\right)&=\cos B+\operatorname{sen} B\times\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}\\ \cos\left(B+C-\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}\right)&=\cos(B+C)+\operatorname{sen}(B+C)\times\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\end{aligned}\right\}(30),$$

y por la misma razon

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(B-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}\right)&=\operatorname{sen} B-\cos B\times\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}\\ \operatorname{sen}\left(B+C-\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}\right)&=\operatorname{sen}(B+C)-\cos(B+C)\times\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\end{aligned}\right\}(31),$$

que sustituidas en las ecuaciones anteriores, dan :



$$\left.\begin{array}{l}
\left(1-2\,\text{sen.}\,\frac{\varepsilon_\rho}{6}\;\text{sen}\left(m-\frac{\varepsilon_\rho}{6}\right)\right)+\left\{\begin{array}{l}\text{L}\cos\text{B}\\ \text{L}'\cos(\text{B}+\text{C})\\ \text{L}''\cos(\text{B}+\text{C}+\text{D})\\ \text{L}'''\cos(\text{B}+\text{C}+\text{D}+\text{E})\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{l}\text{L}\,\text{sen}\,\text{B}\times\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}\\ \text{L}'\,\text{sen}\,(\text{B}+\text{C})\times\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}\\ \text{L}''\,\text{sen}\,(\text{B}+\text{C}+\text{D})\times\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3+\varepsilon_4}{3}\\ \text{L}'''\,\text{sen}\,(\text{B}+\text{C}+\text{D}+\text{E})\times\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3+2\varepsilon_4+\varepsilon_5}{3}\end{array}\right\}=o\\[2ex]
\left(1-2\,\text{sen.}\,\frac{\varepsilon_\rho}{6}\cos\left(m-\frac{\varepsilon_\rho}{6}\right)\right)+\left\{\begin{array}{l}\text{L}\,\text{sen}\,\text{B}\\ \text{L}'\,\text{sen}\,(\text{B}+\text{C})\\ \text{L}''\,\text{sen}\,(\text{B}+\text{C}+\text{D})\\ \text{L}'''\,\text{sen}\,(\text{B}+\text{C}+\text{D}+\text{E})\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{l}\text{L}\cos\text{B}\times\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}\\ \text{L}'\cos(\text{B}+\text{C})\times\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}\\ \text{L}''\cos(\text{B}+\text{C}+\text{D})\times\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3+\varepsilon_4}{3}\\ \text{L}'''\cos(\text{B}+\text{C}+\text{D}+\text{E})\times\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3+2\varepsilon_4+\varepsilon_5}{3}\end{array}\right\}=o
\end{array}\right\}\;(32).$$

Estas ecuaciones exigen la condicion de cierre del polígono ABCDE (*Fig.* 8). Los ángulos que figuran en ellas son los verdaderos ó compensados; pero como sólo se conocen los observados, al introducirlos en las (32) no las satisfarán, y será preciso para conseguirlo que todos los ángulos sufran pequeñísimas correcciones. Las correspondientes ΔA, ΔB, ΔC, á los ángulos del polígono producirán alteraciones inapreciables en los términos de las segundas agrupaciones, que están afectos de los tambien pequeños coeficientes $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}$, $\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}$...; de suerte que, dentro de los límites del cálculo, estos términos se pueden considerar con seguridad como cantidades constantes. Respecto á los términos de las primeras agrupaciones, sus incrementos correspondientes á los de los arcos A, B, C..., serán para los cosenos:

$$\left.\begin{array}{c}\Delta\cos B=\cos(B+\Delta B)-\cos B=\cos B\cos\Delta B-\operatorname{sen}B\operatorname{sen}\Delta B-\cos B\\ \Delta\cos(B+C)=\cos(B+C+\Delta B+\Delta C)-\cos(B+C)=\\ \cos(B+C)\cos(\Delta B+\Delta C)-\operatorname{sen}(B+C)\operatorname{sen}(\Delta B+\Delta C)-\cos(B+C).\\ \Delta\cos(B+C+D)=\cos(B+C+D+\Delta B+\Delta C+\Delta D)-\cos(B+C+D)=\\ \cos(B+C+D)\cos(\Delta B+\Delta C+\Delta D)-\operatorname{sen}(B+C+D)\operatorname{sen}(\Delta B+\Delta C+\Delta D)-\\ \cos(B+C+D)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}(33).$$

Desarrollando las expresiones de senos y cosenos de la suma de incrementos, será para esta última ecuacion:

$$\left.\begin{array}{c}\cos(\Delta B+\Delta C+\Delta D)=\cos\Delta B\cos\Delta C\cos\Delta D-\cos\Delta B\operatorname{sen}\Delta C\operatorname{sen}\Delta D-\\ \operatorname{sen}\Delta B\operatorname{sen}\Delta C\cos\Delta D-\operatorname{sen}\Delta B\cos\Delta C\operatorname{sen}\Delta D\\ \operatorname{sen}(\Delta B+\Delta C+\Delta D)=\operatorname{sen}\Delta B\cos\Delta C\cos\Delta D-\operatorname{sen}\Delta B\operatorname{sen}\Delta C\operatorname{sen}\Delta D+\\ \cos\Delta B\operatorname{sen}\Delta C\cos\Delta D+\cos\Delta B\cos\Delta C\operatorname{sen}\Delta D\end{array}\right\}(34),$$

que sustituidas en ella, despreciando los términos que contienen el producto de senos de incrementos y aceptando como igual á la unidad el producto de sus cosenos (*), se tendrá para el incremento del coseno de la suma de arcos,

$$\left.\begin{aligned}\Delta \cos (B+C+D) = \cos (B+C+D) (\cos \Delta B \cos \Delta C \cos \Delta D - 1) - \\ \operatorname{sen} (B+C+D) (\Delta B + \Delta C + \Delta D).\end{aligned}\right\} \quad (35).$$

El segundo factor del primer término difiere, por lo dicho, poquísimo de cero; resultando por último sin error sensible:

$$\Delta \cos (B+C+D) = - \operatorname{sen} (B+C+D) (\Delta B + \Delta C + \Delta D) \qquad (36).$$

Análogamente y por las mismas consideraciones, se puede aceptar para el incremento del seno de la suma de arcos

$$\Delta \operatorname{sen} (B+C+D) = \cos (B+C+D) (\Delta B + \Delta C + \Delta D) \qquad (37).$$

Admitido esto, no presenta dificultad la aplicacion del cálculo á las dos ecuaciones de condicion de cierre del polígono, sino que, por el contrario, por su forma se asimilan á las sencillas de lado, puesto que sólo se diferencian las que se consideran al presente en que se componen de tantos términos variables como lados tie-

(*) El producto de los senos de dos incrementos se considera como una diferencial de segundo órden. Respecto á los cosenos, para formar idea de la influencia de esta suposicion, nótese que para un incremento de 1′, límite á que nunca llegará, el log. coseno es $\bar{1},99999998$, y en el caso desfavorable de un producto de 15 factores sería el de éste $\bar{1},99999970$; la diferencia á la unidad 0,0000007. Quedan, pues, libres de error, por este concepto, las cifras que entran en el cálculo.

ne el polígono ménos uno. Representando respectivamente por H y H′ las sumas de los términos constantes en ambas ecuaciones, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} -H = L\cos B + L'\cos(B+C) + L''\cos(B+C+D) + L'''\cos(B+C+D+E) \\ -H' = L\,\mathrm{sen}\,B + L'\,\mathrm{sen}(B+C) + L''\mathrm{sen}(B+C+D) + L'''\mathrm{sen}(B+C+D+E) \end{array}\right\} (38).$$

Introduciendo ahora en estas ecuaciones todas las magnitudes angulares observadas, los segundos miembros diferirán de los primeros en cantidades que se pueden considerar como diferenciales de las funciones, correspondientes á incrementos diferenciales de todas las variables ó cantidades observadas; por consiguiente, agregando á los valores numéricos de los segundos miembros sus diferenciales, deberán igualarse con los primeros. Representando por M y M′ los valores de los segundos miembros, serán las ecuaciones de condicion

$$\left.\begin{array}{l} (M+H) + d(L\cos B + L'\cos(B+C) + \ldots\ldots) = o \\ (M'+H') + d(L\,\mathrm{sen}\,B + L'\,\mathrm{sen}(B+C) + \ldots\ldots) = o \end{array}\right\} \quad (39).$$

La diferenciacion indicada se hace con suma facilidad: los factores L, L′, L″... afectan la forma de cocientes de los productos de los senos de ángulos de la cadena envolvente, á contar desde el lado de partida; por consiguiente, en virtud de las (36) y (37), resultarán respectivamente en ambas ecuaciones para la diferencial de cada término, expresiones de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} d\left(L'\cos(B+C)\right) = \\ L'\left(\cos(B+C)[\cot g\alpha' d\alpha'] - \cos(B+C)[\cot g\beta' d\beta'] - \mathrm{sen}(B+C)(dB+dC)\right) \\ d\left(L'\,\mathrm{sen}(B+C)\right) = \\ L'\left(\mathrm{sen}(B+C)[\cot g\alpha' d\alpha'] - \mathrm{sen}(B+C)[\cot g\beta' d\beta'] + \cos(B+C)(dB+dC)\right) \end{array}\right\} (40).$$

Las ecuaciones de condicion serán pues:

$$\left.\begin{array}{l}
o=(M+H)+L\left([\cos B \operatorname{cotg} \alpha d\alpha]-[\cos B \operatorname{cotg}\beta d\beta]-\operatorname{sen} B dB\right)\\
\quad +L'\left([\cos(B+C)\operatorname{cotg}\alpha' d\alpha']-[\cos(B+C)\operatorname{cotg}\beta' d\beta']-\operatorname{sen}(B+C)(dB+dC)\right)\\
\quad +L''\left([\cos(B+C+D)\operatorname{cotg}\alpha'' d\alpha'']-[\cos(B+C+D)\operatorname{cotg}\beta'' d\beta'']-\operatorname{sen}(B+C+D)(dB+dC+dD)\right)\\
\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
o=(M'+H')+L\left([\operatorname{sen} B \operatorname{cotg}\alpha d\alpha]-[\operatorname{sen} B \operatorname{cotg}\beta d\beta]+\cos B dB\right)\\
\quad +L'\left([\operatorname{sen}(B+C)\operatorname{cotg}\alpha' d\alpha']-[\operatorname{sen}(B+C)\operatorname{cotg}\beta' d\beta']+\cos(B+C)(dB+dC)\right)\\
\quad +L''\left([\operatorname{sen}(B+C+D)\operatorname{cotg}\alpha'' d\alpha'']-[\operatorname{sen}(B+C+D)\operatorname{cotg}\beta'' d\beta'']+\cos(B+C+D)(dB+dC+dD)\right)\\
\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\ (41).$$

Las notaciones α, β, α', β',... indican que dentro de cada paréntesis están agrupados diferente número de sumandos, si bien son comunes algunos ángulos de la cadena envolvente. Los representados por α y β son los alternos que dan directamente la relacion L, los α' y β' los que determinan L', etc. En α' y β' están comprendidos todos los α y β ménos el ángulo γ, del cual no depende L', toda vez que éste es invariable miéntras lo sea la relacion $\frac{\operatorname{sen} p}{\operatorname{sen} p'}$. Por esta razon estos ángulos γ, γ^{I}, γ^{II}, aparecen sólo una vez en cada una de las ecuaciones anteriores. Agrupando los términos en que entran las mismas correcciones, si se designan por a los ángulos que figuran en todas las relaciones L, L', L''...; por b los que entran en todas ménos en la primera, etc.; y por γ, γ^{I}, γ^{II}... los que sólo en una, resultarán en de-

finitiva las ecuaciones de condicion, dispuestas para el cálculo, en la forma:

$$
\left.\begin{array}{l}
o=\frac{1}{\text{sen } 1''}(M+H)+L\cos B\operatorname{cotg}\gamma d\gamma+L'\cos(B+C)\operatorname{cotg}\gamma^{I}d\gamma^{I}+\\
\qquad L''\cos(B+C+D)\operatorname{cotg}\gamma^{II}d\gamma^{II}+\ldots\ldots\\
\qquad +[\operatorname{cotg} a da](L\cos B+L'\cos(B+C)+\\
\qquad\qquad L''\cos(B+C+D)+\ldots\ldots)\\
\qquad +[\operatorname{cotg} b db](L'\cos(B+C)+L''\cos(B+C+D)+\ldots\ldots)\\
\qquad +.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
\qquad -dB(L\,\text{sen}B+L'\text{sen}(B+C)+L''\text{sen}(B+C+D)+\ldots\ldots)\\
\qquad -dC(L'\text{sen}(B+C)+L''\text{sen}(B+C+D)+\ldots\ldots)\\
\qquad -dD(L''\text{sen}(B+C+D)+\ldots\ldots)\\
\qquad -.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
o=\frac{1}{\text{sen } 1''}(M'+H')+L\,\text{sen}B\operatorname{cotg}\gamma d\gamma+L'\text{sen}(B+C)\operatorname{cotg}\gamma^{I}d\gamma^{I}+\\
\qquad L''\,\text{sen}(B+C+D)\operatorname{cotg}\gamma^{II}d\gamma^{II}+\ldots\ldots\\
\qquad +[\operatorname{cotg} a da](L\,\text{sen}B+L'\text{sen}(B+C)+\\
\qquad\qquad L''\text{sen}(B+C+D)+\ldots\ldots)\\
\qquad +[\operatorname{cotg} b db](L'\text{sen}(B+C)+L''\text{sen}(B+C+D)+\ldots\ldots)\\
\qquad +.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
\qquad +dB(L\cos B+L'\cos(B+C)+L''\cos(B+C+D)+\ldots\ldots)\\
\qquad +dC(L'\cos(B+C)+L''\cos(B+C+D)+\ldots\ldots)\\
\qquad +dD(L''\cos(B+C+D)+\ldots\ldots)\\
\qquad +.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .
\end{array}\right\}(42).
$$

Sabido es que las correcciones da, db, dc... de los ángulos observados se han de expresar en funcion de las correspondientes á las direcciones que los determinan. Para conocer los signos que deben afectar á los términos por el concepto de los senos y cosenos de los ángulos B, B+C, B+C+D,... que entran en ellos, basta notar que para los senos será positivo cuando la

suma de los suplementos de cada ángulo sea menor que 180°, y negativo cuando exceda de esta cantidad; y con respecto á los cosenos, si dicha suma de suplementos está comprendida entre 0° y 90° ó entre 270° y 360°, será positivo, y negativo en el caso contrario. Los signos de las correcciones de cada direccion estarán indicados por las direcciones más probables en cada estacion y la disposicion de la figura de la red.

Como estas ecuaciones se componen de un crecido número de términos, es conveniente seguir una marcha trazada al expresarlas numéricamente. Para esto se satisface primeramente la condicion (21) haciendo las correcciones en proporcion á las cotangentes de los arcos, y se obtendrán así unos valores únicos y muy aproximados de las relaciones L, L′, L″,... que han de servir para el conocimiento de las constantes. Se elegirá el lado AB de proyeccion, entre los de mayor longitud lineal, con el objeto de que L, L′, L″,... sean lo menores posibles. Para determinar los ángulos planos B′, C′, D′..., y los excesos esféricos de los triángulos I, II, III..., se puede operar con los triángulos esféricos; pero conviene seguir la práctica de resolucion de los planos correspondientes, para lo cual se imagina el triángulo isósceles de partida I (*Fig.* 9) con el ángulo m arbitrario, atendiendo á la configuracion de todos los demas triángulos. Con estos datos se calcularán el ángulo m' y lado O′B′ y el exceso esférico ε_1, y por consiguiente, los ángulos esféricos del triángulo I (*Fig.* 8). Restando del ángulo B el calculado $m' + \frac{\varepsilon_1}{3}$ se tendrá el $n' + \frac{\varepsilon_2}{3}$ esférico del triángulo II, y con él

y los dos lados conocidos lo será tambien ε_2, y por lo tanto, n' (*Fig.* 9) del triángulo plano. Siguiendo este procedimiento hasta llegar al triángulo V, se obtendrán todos los excesos esféricos de los triángulos, y con su suma ε_p el correspondiente al área total del polígono. Despues se hallarán con sus signos los senos y cosenos de los ángulos B, B+C, B+C+D..., los que, multiplicados respectivamente [(32)] por L, L′, L″..., y por los factores conocidos $\frac{\varepsilon_1}{3}$, $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}$..., y sumados los productos darán á conocer, en union de ε_p á H y H′. Los mismos productos de los lados por los senos y cosenos darán á M y M′ [(38)], con lo cual se tendrán las constantes $\frac{1}{\text{sen } 1''}$ (H+M), y $\frac{1}{\text{sen } 1''}$ (H′+M′). Introduciendo en los segundos miembros de las (42) los valores de estos últimos productos, los de las cotagentes de los ángulos observados *a*, *b*, *c*..., y sustituyendo las correcciones *da*, *db*, *dc*,... $d\gamma$, $d\gamma'$,... *d*B, *d*C,... por las de las direcciones correspondientes, quedarán definitivamente dispuestas las ecuaciones para los cálculos sucesivos.

Si se examina la índole de la condicion satisfecha por las dos ecuaciones (42), que es la de cierre del polígono ABCDE (*Fig.* 8), se ve que ambas, en union de la (21), exigen la existencia del espacio cerrado por las cadenas; es decir, que queda tambien cumplida la condicion de cierre del polígono exterior A′, B′, C′,... H′. En efecto, una vez cerrado el polígono interior y teniendo cada lado un valor único, calculado que sea por cualquier camino, si se parte, por ejemplo, de AA′, dando la vuelta al polígono se llegará al lado AH′,

coincidiendo el punto A en el mismo lugar que anteriormente, puesto que cierra el polígono interior. El triángulo A′AH′ de enlace queda determinado porque el ángulo en A lo está por las direcciones AH′ y AA′, y los senos de los ángulos s y s' han de guardar entre sí la relacion de sus lados opuestos; por lo tanto, es indispensable que el punto A′ venga á ocupar precisamente el mismo lugar que tenía en el lado de partida AA′.

En vista de lo expuesto, es indudable que se debe adoptar este último medio de formular las condiciones de lado debidas á los espacios cerrados por las cadenas, porque resolviendo el problema dentro de los límites exigidos por la naturaleza del cálculo, no tiene el inconveniente de la fórmula (22) de ser de difícil aplicacion, ni tampoco el gravísimo defecto del segundo medio, que por introducir en el sistema nuevas líneas, aumenta considerablemente la extension de los cálculos de la compensacion general. Por el contrario, las últimas fórmulas son de fácil establecimiento, no variando el número total de condiciones de la red, que sigue determinado por las expresiones generales indicadas. Las ecuaciones de condicion son, pues, las de lado (21) y las dos (42) y la de ángulo (19). Para el valor de ε de esta última, se debe aceptar el calculado al formar las (42), teniendo presente que cada uno de los ε_1, ε_2, ε_3... que le componen, se ha de obtener por medio del valor correspondiente de R_c.

ECUACIONES DE CONDICION ORIGINADAS POR LAS BASES MEDIDAS.

El número total de las condiciones que se han de cumplir en la red, se puede dividir en dos especies: 1.ª las que producen las mediciones angulares por sí solas, independientemente de las magnitudes de las líneas, y 2.ª las originadas por las relaciones lineales determinadas directamente por mediciones de bases. Cuanto queda expuesto se refiere á la primera, pues en las ecuaciones de ángulo sólo son necesarias las longitudes aproximadas de las líneas, deducidas de cualquier base. Pero cuando se conozca por medicion más de una de éstas, es evidente que estos datos incompatibles han de influir en la compensacion general de la red, corrigiendo todas las observaciones.

La base central de Madridejos se considera como una de las líneas de la red general á causa de su longitud de casi 15 kilómetros; pero resuelto ya, al llevar á cabo su medicion, el importante problema de la magnitud de las bases geodésicas, las que se midan en lo sucesivo sólo deberán tener de dos á tres kilómetros y enlazarse por una red especial compensada aisladamente á una línea ó lado de la general, que es el que debe figurar en las ecuaciones de condicion de que se trata.

Si no existiese más que una base medida, una vez compensado el sistema, las longitudes constantes de todas las demas líneas sólo dependerian de ella; el conocimiento simultáneo de otra línea ó base exige que, con-

siderándolas unidas solamente por medio de una cadena de triángulos elegidos en la red, la relacion entre los productos de los senos de los ángulos de continuacion sea igual á una cantidad ya determinada; condicion que ha de quedar satisfecha simultáneamente con todas las demas.

Sean las dos bases medidas B y B′ (*Fig.* 10); se podrá establecer, como exacta, la condicion de lado análoga á la (21):

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\alpha^{I} . \operatorname{sen}\alpha^{II} ..... \operatorname{sen}\alpha^{m}}{\operatorname{sen}\beta . \operatorname{sen}\beta^{I} . \operatorname{sen}\beta^{II} ..... \operatorname{sen}\beta^{m}} = \frac{B}{B'} \qquad (43),$$

entendiéndose que B y B′ han de entrar con sus errores probables. Para enlazar las dos bases se debe elegir la cadena que, siendo regularmente configurada, tenga ménos puntos, y en la que todos los ángulos del primer miembro de la ecuacion sean observados y no deducidos.

Otra nueva base B″ exige su ecuacion de condicion exactamente de la misma forma, debiendo relacionarla con la más próxima, y así de las demas; por lo que el número de ecuaciones de esta especie será igual al de bases ménos una.

ESTABLECIMIENTO DE LAS ECUACIONES DE CONDICION.

El considerable número de líneas y puntos que constituyen la red exige grandes precauciones en el establecimiento de las ecuaciones de condicion,

pues el prévio conocimiento del total de condiciones no excluye el error de repetir alguna ya implícitamente satisfecha. Con objeto de facilitar esta parte de los cálculos, es conveniente considerar partida la red en varios trozos ó grupos y operar separadamente en cada uno de ellos; teniendo conocidas, para agregarlas despues, las condiciones producidas por su reunion. Para conseguirlo se puede observar que, para dividir en T trozos una cadena que no cierre espacio, son necesarias $T-1$ soluciones de continuidad, ó sean líneas de enlace; cada una de éstas que se presente ademas en cualquier caso, acusa la existencia de un espacio cerrado por la reunion de los trozos; de manera, que si en la red se han elegido para dividirla E líneas de enlace, habrá $E-T+1$ polígonos ó espacios que no aparecen en los trozos y sí en la red total, teniendo que agregarse á las ecuaciones de condicion halladas $E-T+1$ de ángulo y $3(E-T+1)$ de lado.

Expresando por las fórmulas generales el número total de condiciones de la red y la suma de las de todos los grupos, debe necesariamente aparecer esta misma diferencia. En efecto: sean L y P el número total de líneas y puntos de la red, y $l', l'', l'''... p', p'', p'''$, respectivamente los de los trozos; será:

$$L=l'+l''+l'''+.....+l^{T}-E=[l]-E$$
$$P=p'+p''+p'''+.....+p^{T}-2E=[p]-2E$$

y por consiguiente,

	DE ÁNGULO.	DE LADO.
Número total de ecuaciones en la red...	$[l]-[p]+E+1$.....	$[l]-2[p]+3(E+1)$
Id. de las de los T grupos..................	$[l]-[p]+T$..........	$[l]-2[p]+3T$
Diferencias.......	$E-T+1$................	$3(E-T+1)$

Puesto que en la division que se indica en la última lámina hay 17 líneas de enlace y 9 trozos, por su reunion formarán $17-9+1=9$ espacios cerrados, que originan 9 ecuaciones de ángulo y 27 de lado.

En la tabla 6.ª aparece calculado con mucha aproximacion el número de ecuaciones de cada grupo, número que no habrá de sufrir grandes alteraciones. En los grupos VIII y IX, cuyas observaciones angulares no están terminadas, se han supuesto existentes las líneas que probablemente se observarán.

Para la marcha del cálculo se debe considerar aisladamente cada uno de los grupos; rectificando primero el número de condiciones, tanto de ángulo como de lado, se pasará despues á elegir las figuras que las originan; y por último, teniendo presente cuanto se ha dicho, se establecerán las ecuaciones, despues de calculados los excesos esféricos correspondientes á las figuras que exigen condicion de ángulo. Agregando al total de ecuaciones las 36 que se forman por la reunion de los trozos, se tendrán todas las de la primera especie, que unidas á las que produzcan las bases, constituirán el total á que han de satisfacer todos los elementos de la red.

FORMACION Y RESOLUCION DE LAS ECUACIONES FINALES.

Las ecuaciones para el enlace entre los cálculos de cada estacion y los que exige la compensacion de toda la red, dan los valores de las correcciones de cada di-

reccion en funcion de las incógnitas auxiliares [1] [2]..., que tienen numeracion correspondiente, formándose igual número de grupos que de estaciones, y entrando en cada uno tantas incógnitas como direcciones ménos una. Las condiciones á que ha de satisfacer el sistema están expresadas por ecuaciones cuyas incógnitas son las correcciones de las direcciones que forman la figura geométrica, orígen de la condicion. Partiendo de ellas se formulan los valores de cada una de las incógnitas [1] [2]... en funcion tambien de otras auxiliares notadas por los números de órden I, II, III... de las ecuaciones de condicion, y por su formacion cada una de estas expresiones tendrá por incógnitas todos los números de órden de las ecuaciones de condicion, en que entren las correcciones (1) (2)... de las direcciones que tengan igual numeracion que aquellas; es decir, los correspondientes á todas las ecuaciones formadas por las figuras geométricas en que entra la direccion afectada por la correccion correspondiente á la incógnita [x]. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de enlace, se obtienen los de las correcciones (1) (2)... en funcion de I, II..., existiendo en todas las ecuaciones de cada grupo tantas incógnitas como figuras geométricas se hayan considerado alrededor del vértice á que corresponde; y, por consiguiente, en la ecuacion final tantas incógnitas como figuras geométricas distintas se hayan considerado alrededor de todos los puntos entre los que se haya establecido la ecuacion de condicion.

Si cada punto de la red estuviese directamente ligado con todos los demas, en cada ecuacion final figura-

rian todas las incógnitas y el número de coeficientes auxiliares necesarios para la resolucion de las 760 ecuaciones, en número redondo (*) sería de 73.740900, distribuidos en 289.940 columnas del formulario adoptado, compuestas algunas de más de 1500 renglones. Pero como la red está muy léjos de presentar estas condiciones, sino que sus puntos se van ligando sucesivamente por medio del curso de las cadenas, hay que determinar, siquiera sea aproximadamente, lo que podrá disminuir por este concepto el cálculo de resolucion.

La ecuacion final que proviene de la figura formada por los puntos *Peñas*, *Gamonal* y *Trigueiro* (grupo I), tendrá tantas incógnitas como figuras se puedan considerar formadas alrededor de cada uno de ellos. *Peñas* dará 9 ecuaciones, 6 de ángulo y 3 de lado; *Gamonal* 7 de ángulo y 4 de lado; pero como 6 de ellas son comunes con las anteriores, no aumentará la ecuacion más que en 5 incógnitas; y por último, por *Trigueiro* en otras 2, que dan un total de 16 incógnitas. Añadiendo 4 por pertenecer la figura á la cadena que cierra un espacio dentro del mismo grupo I, resulta un total de 20 incógnitas para la ecuacion final. Este tipo se puede tomar como el promedio aproximado para todas las de la red, pues si bien en algunos casos, como sucede en el extremo NO., se hallarán algunas ecuaciones en que no figuren más de 9 incógnitas, en cambio hácia el centro de la Península las hay con más

(*) 712 de la tabla 6.ª, 36 de la reunion de los grupos y 3 por 4 bases medidas.

de 80; superando todavía esta cifra algunas de las formadas por los grandes polígonos ó espacios, y tambien las debidas á las bases.

Escritas las 760 ecuaciones finales en la forma adoptada sin repetir los términos de idénticos coeficientes, y suponiendo que cada una consta de los 21 términos, compondrán entre todos, incluidas las constantes, un total de 8740, correspondientes á otras tantas columnas de cálculo en el *Estado* de resolucion. A éstas se agregarán las que provengan de la eliminacion de incógnitas anteriores que falten en cada ecuacion, cuyo número no es posible determinar preliminarmente de una manera suficientemente aproximada, puesto que depende del enlace de las ecuaciones; pero no se cree excesivo suponer que ascienda á 10.000 columnas, en números redondos; cifra elocuente que por sí sola justifica cuanto queda dicho sobre el método y órden necesarios en la ejecucion de este cálculo de resolucion. Es preciso, pues, que una vez establecidas las ecuaciones finales se estudien con el mayor detenimiento los medios materiales de resolverlas; no pudiéndose, por otra parte, seguir la norma de algun trabajo análogo, porque no se cree exista ninguno hecho ni proyectado que por su extension sea comparable al de nuestra red.

Las ecuaciones de condicion se deben ordenar de manera que produzcan en el cálculo el menor desarrollo posible; empezando, para conseguirlo, por las que contengan menor número de incógnitas, y sujetándose á las agrupaciones naturales que exige la figura.

Una vez conocidos los valores de las incógnitas, lo serán tambien los de las correcciones (1) (2)..., las cuales deberán satisfacer á las ecuaciones de condicion. Con estas correcciones se determinarán las correspondientes á las direcciones iniciales de cada estacion y por resta las variaciones de todas ellas, obteniéndose, por consiguiente, los datos para calcular todos los errores de observacion.

Planteadas que sean las ecuaciones, habrá que decidir el número de cifras que se deberán emplear; cuestion de suma trascendencia para llegar á resultados que tengan la exactitud préviamente exigida, con el mínimo desarrollo en las operaciones numéricas.

Por regla general, todos los cálculos se deberán efectuar simultánea y separadamente, por tres secciones de geodestas, con frecuentes confrontaciones á cargo de una cuarta seccion exclusivamente dedicada á este objeto. Cuando sea conveniente el uso de aritmómetros, se debe considerar cada par de ellos como unidad.

REDUCCION DE LA BASE DE MADRIDEJOS AL NIVEL DEL MAR (*).

Siendo ya conocidas por las nivelaciones de precision las altitudes sobre el nivel medio del Mediterráneo en el puerto de Alicante, de los extremos *Bolos* y *Carbonera* de la base de Madridejos y sus latitudes

(*) *Base central de la triangulacion geodésica de España*, páginas 297 y siguientes.

y azimutes respectivos, aproximados al segundo sexagesimal, calculados con las direcciones más probables en cada estacion aislada á partir del azimut *Observatorio-Hierro*, se puede obtener, con auxilio de los radios de curvatura calculados, un valor definitivo para la longitud de la base reducida.

Los nuevos datos son:

	LATITUD.	AZIMUT DE LA BASE.	ALTITUD.
Carbonera. . .	39°..32′..46″. . . .	295°..20′..26″. . . .	»
Bolos.	39...29...23... . . .	115...26...19... . . .	717m,235

Representando por:

L... La longitud de una base ó seccion de ella, medida directamente.

l... Idem de L reducida al nivel del mar.

R_L... El radio de curvatura terrestre correspondiente.

a_m... La altitud media de la base ó seccion.

G_α... La longitud lineal del arco de un grado del radio R_L.

α... El azimut de la base.

Será con suficiente aproximacion:

$$L - l = \frac{La_m}{R_L}\left[1 - \frac{a_m}{R_L}\right] \quad (*).$$

$$R_L = G_\alpha \frac{180}{\pi}.$$

$$G_\alpha = G_M + [G_P - G_M] \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Aplicando á estas fórmulas la latitud aproximada

(*) Se pueden despreciar sin recelo los términos siguientes de la série, porque el logaritmo del tercero tiene ya de característica $\bar{9}$.

de *Bolos* (39° 30′) y el ángulo α (64° 36′ 40″) deducido de ambos azimutes, se podrá conocer G_α, y por consiguiente R_L, en la forma siguiente:

G_P	111.475,1. (m)		
G_M	111.024,3.		
$G_P - G_M$ . . .	450,8.	. . log.	2,65398391
		log. sen²α. . . .	$\overline{1}$,91177792
2.° término. . .	367,9.	. . . .	2,56576183
G_α	111.392,2.	. . log.	5,04685478
		log. $\frac{180}{\pi}$	1,75812264
R_L	6.382.303m,1.	. . log. R_L	6,80497742

Conocido este radio de curvatura y la altitud del extremo *Bolos*, se han determinado con los promedios de las cinco secciones de la base los correspondientes valores de *l*, resultando para la longitud de la

Base de Madridejos reducida definitivamente al nivel del Mediterráneo en Alicante

14.662m,8964 ± 0,0025.

TABLA 1.ª

L		log. sen² L	log. (e.² sen² L)	1—e.² sen² L	log. (1—e.² sen² L)	log. (1—e.² sen² L)$^{\frac{1}{2}}$	log. (1—e.² sen² L)$^{\frac{3}{2}}$
35°	30′	$\bar{1}$,52790808	$\bar{3}$,35877636	0,997715378	$\bar{1}$,99900676	$\bar{1}$,99950338	$\bar{1}$,99851014
36	0	53843738	36930566	7659516	898235	49117	847352
	30	54877520	37964348	7603136	895780	47890	843670
37	0	55892604	38979432	7546453	893313	46656	839969
	30	56889426	39976254	7489487	890833	45416	836249
38	0	57868396	40955224	7432253	888341	44170	832511
	30	58829914	41916742	7374770	885837	42918	828755
39	0	59774360	42861188	7317054	883324	41662	824986
	30	60702106	43788934	7259124	880801	40400	821201
40	0	61613500	44700328	7200998	878271	39135	817406
	30	62508884	45595712	7142692	875731	37865	813596
41	0	63388584	46475412	7084224	873184	36592	809776
	30	64252914	47339742	7025613	870652	35516	805948
42	0	65102180	48189008	6966877	868073	34036	802109
	30	65936670	49023498	6908052	865510	32755	798265
43	0	66756666	49843494	6849098	862943	31471	794414
	30	67562440	50649268	6790091	860371	30185	790556
44	0	$\bar{1}$,68354254	$\bar{3}$,51441082	0,996731031	$\bar{1}$,99857798	$\bar{1}$,99928899	$\bar{1}$,99786697

TABLA 2.ª

L		$\log.\rho = \log.\frac{E(1-e^2)}{(1-e^2\,\text{sen.}^2L)^{\frac{3}{2}}}$	$\log.\rho' = \log.\frac{E}{(1-e^2\,\text{sen.}^2L)^{\frac{1}{2}}}$	log. sen. 2 L	$\log.\left(\frac{3}{4}\frac{\pi}{180}\frac{e^2}{1-e^2}\,\text{sen.}\,2L\right)$	$\left(1+\frac{3}{4}\frac{\pi}{180}\frac{e^2}{1-e^2}\,\text{sen.}\,2L\right)$	$\log.\left(1+\frac{3}{4}\frac{\pi}{180}\frac{e^2}{1-e^2}\,\text{sen.}\,2L\right)$	log. r_M
35	30	6,80324261	6,80520145	$\bar{1}$,97567007	$\bar{5}$,92642905	1,000084417	0,00003666	
36	0	27923	21366	7820633	2896531	4911	687	6,80327927
	30	31605	22593	8059632	3135530	5380	707	31610
37	0	35306	23827	8284164	3360062	5822	727	35312
	30	39026	25067	8494378	3570276	6239	745	39033
38	0	42764	26313	8690412	3766310	6629	762	42771
	30	46520	27565	8872393	3948291	6993	777	46526
39	0	50289	28821	9040439	4116337	7330	792	50297
	30	54074	30083	9194658	4270556	7641	806	54081
40	0	57869	31348	9335146	4411044	7925	818	57880
	30	61679	32618	9461993	4537891	8182	829	61687
41	0	65499	33891	9575278	4651176	8412	839	65508
	30	69327	35167	9675071	4750969	8615	848	69338
42	0	73166	36447	9761435	4837333	8792	856	73175
	30	77010	37728	9834425	4910321	8941	862	77022
43	0	80861	39012	9894079	4969977	9064	867	80872
	30	84719	40298	9940441	5016339	9159	0,00003872	84728
44	0	6,80388578	6,80541584	$\bar{1}$,99973536	$\bar{5}$,95049434	1,000089227		6,80388591

TABLA 5.ª

L		$\log. \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 e^2 \text{sen.}^2 L$	$1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 e^2 \text{sen.}^2 L$	$\log. (1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 e^2 \text{sen}^2 L)$	$\log. r_p$	$\log. r_p \cdot r_M$
36°	0′	$\bar{7}$,55203058	0,999999644	$\bar{1}$,99999985	6,80521351	13,60849278
	30	56236820	635	84	22577	854187
37	0	57251904	626	84	23811	859123
	30	58248726	618	83	25050	864083
38	0	59227696	609	83	26296	869067
	30	60189214	600	83	27548	874074
39	0	61133660	591	82	28803	879100
	30	62061406	583	82	30065	884146
40	0	62972800	574	82	31330	889210
	30	63868184	565	81	32599	894286
41	0	64747884	556	81	33872	899380
	30	65612214	547	80	35147	904485
42	0	66461480	538	80	36427	909602
	30	67295970	529	80	37708	914730
43	0	68115966	520	79	38991	919863
	30	68921740	511	79	40277	925005
44	0	$\bar{7}$,69713554	0,999999502	$\bar{1}$,99999978	6,80541562	13,60930153

TABLA 4.ª

L	log. R_c	Diferencias.	log. K	Diferencias.
36° 0′	6,80424639		$\bar{9}$,40490235	
		2454		4909
30	27093		85326	
		2468		4936
37 0	29561		80390	
		2480		4960
30	32041		75430	
		2492		4984
38 0	34533		70446	
		2504		5007
30	37037		65439	
		2513		5026
39 0	39550		60413	
		2523		5046
30	42073		55367	
		2532		5064
40 0	44605		50303	
		2538		5076
30	47143		45227	
		2547		5094
41 0	49690		40133	
		2552		5105
30	52242		35028	
		2559		5117
42 0	54801		29911	
		2564		5128
30	57365		24783	
		2566		5133
43 0	59931		19650	
		2571		5142
30	62502		14508	
		2574		5148
44 0	6,80465076		$\bar{9}$,40409360	

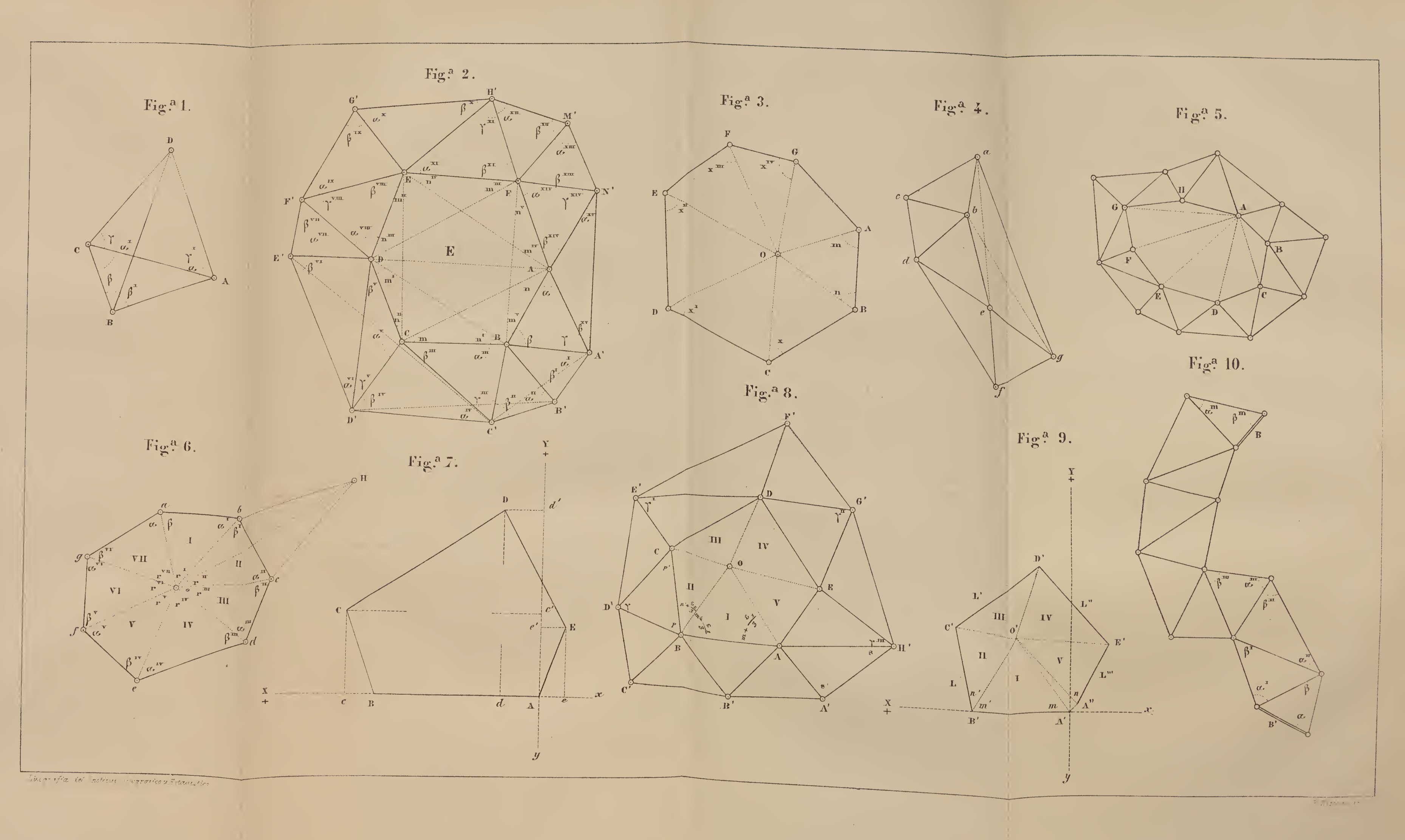
TABLA 5.ª (*).

L	log. G_M	G_M	Diferencias.	log. G_p	G_p	Diferencias.
		m	m		m	m
36° 0′	5,04515665	110957,5		5,04709087	111452,8	
30	19346	0966,9	9,4	10313	455,9	3,1
37 0	23048	0976,4	9,5	11547	459,1	3,2
30	26769	0985,9	9,5	12786	462,3	3,2
38 0	30507	0995,4	9,5	14032	465,5	3,2
30	34262	1005,0	9,6	15284	468,7	3,2
39 0	38033	1014,7*	9,7	16539	471,9	3,2
30	41817	1024,3	9,6	17801	475,1	3,2
40 0	45616	1034,0	9,7	19066	478,4	3,3
30	49423	1043,8	9,8	20333	481,6	3,2
41 0	53244	1053,5	9,7	21608	484,9	3,3
30	57074	1063,3	9,8	22883	488,2	3,3
42 0	60911	1073,2*	9,9	24163	491,5	3,3
30	64758	083,0	9,8	25441	494,8	3,3
43 0	68608	1092,8	9.8	26727	498,0	3,2
30	72464	1102,7	9,9	28013	501,4	3,4
44 0	5,04576327	111112,6	9,9	5,04729298	111504,6	3,2

(*) Las latitudes corresponden á los puntos medios de los arcos G_M, resultando conformes los valores de éstos con los ya calculados más rigorosamente en el Instituto geográfico, exceptuando los dos marcados con asterisco, que son: 111014ᵐ,611 y 111073ᵐ,126.

TABLA 6.ª

Grupos.	LÍNEAS DE ENLACE.		Número de puntos.	Número de líneas.		Núm. de ecuaciones de condicion		Total en cada grupo.
				Recíprocos.	No recíprocos.	De ángulo.	De lado.	
I.	Contés. . . . . Navajos. . . . . Castillejo.	Espigüete. Sardanedo. Teso-Santo.	43	96	7	54	20	74
II.	Teso-Santo. . . . . . Flores. . . . . Duranes. . . . . Hamapega..	Castillejo. Serrota. Judio. Tentudia.	36	90	11	55	32	87
III.	Contés. . . . . Navajos. . . . . Carbonero.. . . . . . Hinodejo. . . . . S. Bartolomé..	Espigüete. Sardanedo. Colgadizos. Cebollera. Higa.	40	106	7	67	36	103
IV.	Carbonero. . . . . . Berninches. . . . . . Navajo.. . . . . Serrota..	Colgadizos. Altomira. Calderina. Flores.	24	74	5	51	34	85
V.	Calderina. . . . . . . Barreros. . . . . Mágina.. . . . . Judio.	Navajo. Almenara. Ahillo. Duranes.	20	55	5	36	23	59
VI.	Tentudia. . . . . . . Ahillo. . . . . Tetica.	Hamapega. Mágina. Piorno.	39	89	10	51	24	75
VII.	Higa.. . . . . Cebollera.. . . . . . . Sierra alta.. . . . . . Zaragoza.	S. Bartolomé. Hinodejo. Palomera. Estéban.	20	42	8	23	13	36
VIII.	Estéban. . . . . Ares.	Zaragoza. Desierto.	41	92	4	52	17	69
IX.	Desierto. . . . . Palomera. . . . . Berninches. . . . . . Barreros. . . . . Tetica.	Ares.. Sierra alta. Altomira. Almenara. Piorno.	58	140	14	83	41	124
	Totales.		321	784	71	472	240	712


Fig.a 1.
Fig.a 2.
Fig.a 3.
Fig.a 4.
Fig.a 5.
Fig.a 6.
Fig.a 7.
Fig.a 8.
Fig.a 9.
Fig.a 10.